UDK 528.235
Pregledni rad

PROBLEM OPTIMALNIH KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA

PROBLEMS OF OPTIMAL CARTOGRAPHIC PROJECTIONS

Krešimir Frankić

SAŽETAK

Kartografske projekcije primjenjuju se za grafičko prikazivanje teritorija u sitnom mjerilu. Pravilnim izborom projekcije smanjuju se deformacije prikazanog teritorija, koji je omeđen graničnom linijom. U većini slučajeva ta granična linija nije neka matematički definirana krivulja, koja se najlakše prikazuje u obliku zatvorenog poligona. Optimalne kartografske projekcije, slijedeći neki definirani kriterij, trebale bi utvrditi konstante projekcije s najmanjim mogućim deformacijama. Airy-Kavrajski kriterij vodi direktno do optimizacije Euklidske norme, a to znači do metode najmanjih kvadrata. Brzi moderni kompjutori omogućuju jednostavnu optimizaciju bilo koje analitički definirane projekcije za teritorije čija granica se aproksimira konačnim nizom individualnih točaka.

Ključne riječi: Optimalne kartografske projekcije, mjere kvalitete kartiranja, metoda najmanjih kvadrata.

ABSTRACT

Cartographic projections are basis for the graphical representation of various territories in small scale mapping. Proper selection of projection reduces the deformation of the presented territory, which is bounded by a boundary line. In most cases, this border line is not a mathematically defined curve, which is most easily displayed in the form of a closed polygon. The optimal cartographic projections based on a selected criterion of quality are those whose constants lead to the smallest value of the criterion. In the presented work it is recommended to use Airy-Kavrajski criterion whose minimization is actually minimization of the second Euclidean norm. The solution of optimal projections of various classes is reduced to the method of least squares. Fast modern computers enable the optimization of an arbitrary territory by evaluating the selected criterion in a finite number of points.

Keywords: Optimal cartographic projections, measures of quality, method of least squares.

1. UVOD

Karta je umanjena, pojednostavljena i djelomično objašnjena slika Zemaljske sfere, ili njenog nekog dijela u ravnini projekcije. Matematička kartografija proučava analitičke formulacije projiciranja zakrivljene površine Zemlje na ravninu i, prema tome, ona je matematička osnova karata (Frankić, 2010). Točke Zemljine površine analitički se prenose na ravninu pomoću, bar teoretski, neizmjerno mnogo matematičkih funkcija. Izbor funkcija zavisi o namjeni i zahtjevima karata. Uopćeno može se kazati da bi karta trebala biti što je moguće vjernija slika površine Zemlje. Deformacije stvorene projiciranjem trebale bi biti svedene na najmanju moguću mjeru. One bi trebale biti ***optimalne***. Gauss je dokazao da se ***izometričko preslikavanje*** dviju matematički regularnih ploha, a to je preslikavanje u kome su kod projiciranja dužine sačuvane, može ostvariti samo ako te plohe imaju istu Gaussovu zakrivljenost. Kako Zemlja kao sfera (kugla) ima zakrivljenosti veličine svog radijusa, a radijus zakrivljenosti ravnine je neizmjerno velik, izometrijsko preslikavanje Zemlje kao sfere na ravninu nije moguće. Svaka matematička funkcija koja definira izvjesnu projekciju će na neki način deformirati domenu preslikavanja i jedan od osnovnih zadataka matematičke kartografije predstavlja pronalazak najpovoljnije projekcije kod koje su deformacije svedene na minimum. Pri tome treba imati na umu da pojam deformacije u kartografiji nije jednoznačan. Projekcije transformiraju površinu Zemlje, ili nekog njenog dijela na ravninu, a osnovni elementi kartografske domene su dužine, kutovi i površine. Specijalno odabrane funkcije transformacije mogu sačuvati kod projiciranja ili kutove, ili površine, ali nikada ne mogu sačuvati sve dužine jedne domene. Zbog toga kod definicije kvalitete kartografskih projekcija najbolje je uzeti deformaciju dužina kao osnovni kriterij, jer ona postoji kod svih projekcija. Transformacijske funkcije koje kod projiciranja sačuvaju površine zovu se ***ekvivalentne*** ili ***istopovršinske projekcije***. One se ne primjenjuju kod geodetskih projekcija, ali su izuzetno važne kod geografskih karata sitnog mjerila. S druge strane transformacije koje čuvaju kutove zovu se ***konformne projekcije*** i za geodete predstavljaju najvažniju klasu projekcija.

Problem optimalnih projekcija neke zatvorene domene nije jednoznačno definiran. U prvoj polovini prošlog vijeka čitav niz svjetskih kartografa pokušalo je odrediti kriterije kvalitete kartografskih projekcija. Kako se nije mogao pronaći jedinstveni kriterij pokušaji su ostali bezuspješni. Na kraju je ruski kartograf i geodet Meščerjakov (1968) preporučio jedno ″polurješenje″ u kome optimalne projekcije mogu pripadati dvjema klasama: ***idealnim i najboljim kartografskim projekcijama***. Pojam idealnih projekcija uveo je u kartografiju veliki ruski kartograf Kavrajski (1959) tvrdeći da je moguće pronaći projekciju pod nekim jedinstvenim uvjetom, na primjer, da maksimalna deformacija dužina neke domene bude minimalna. Matematičko rješenje idealnih projekcija još uvijek nije jasno formulirano. Današnji kartografi su rijetko dobri poznavaoci matematike, a matematičari, s druge strane, trebali bi tek otkriti interes za kartografiju i jedinstveno rješenje problema idealnih projekcija. Kavrajski je tvrdio da idealne projekcije postoje i da su jedinstvene, a američki kartograf Milnor (1969) je i dokazao njihovo postojanje. Međutim, izvod transformacijskih funkcija idealnih projekcija neke proizvoljne zatvorene domene nije moguće praktički riješiti, jer zahtijeva testiranje neizmjerno velikog broja postojećih projekcija i na koncu usporedbu dobivenih rezultata. To je, naravno, zbog velikog broja postojećih i potencijalnih projekcija nemoguć zadatak. Problem minimaliziranja maksimalnih deformacija koji vodi do idealnih projekcija i dalje ostaje za opće neregularne kartografske domene nepoznanica.

Alternativno rješenje Meščerjakova vodi do ***najboljih projekcija*** neke klase kartografskih transformacija za koje će deformacije biti najmanje. Kad se poznaje veličina i oblik neke zatvorene kartografske domene iz iskustva mogu se izabrati neke klase projekcija i onda među tim projekcijama odrediti optimalnu. Komparacijom rezultata nekoliko optimalnih projekcija dobije se najbolja projekcija zadane domene. Kod velikog broja tranformacijskih sustava rješenje zahtijeva varijacijski problem pod uvjetom minimuma. Meščerjakov je nazvao kriterije koji vode do rješenja najboljih projekcija ***kriteriji varijacijskog tipa***.

Konformne projekcije predstavljaju poseban problem i određivanje najboljih konformnih projekcija bila je tema istraživanja mnogih kartografa i matematičara. Danas je generalno prihvaćen ***kriterij Čebiševa*** kao najrealniji. Čebišev je dokazao da su najbolje konformne projekcije neke zatvorene domene one projekcije kod kojih prirodan logaritam maksimalnog mjerila ima minimalnu vrijednost. Čebiševljeve projekcije pripadaju ***minimaks tipu***. Rigorozno analitičko rješenje Čebiševljevih projekcija moguće je samo u slučaju kad su granice domene anlitički definirane, dok proizvoljne granice ne dozvoljavaju strogo teoretsko rješenje. Međutim, u praksi se problem može riješiti numerički sa zadovoljavajućom preciznosti primjenom jedne od aproksimacijskih funkcija konformnog preslikavanja.

2. MATEMATIČKA OSNOVA KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA

Temeljni teoretski odnosi matematičke kartografije nalaze se unutar područja diferencijalne geometrije. Ako se uzme neka zatvorena domena D na jednoj regularnoj površini koja je definirana svojim parametričkim koordinatama $u^i\ (i=1,2)$ vektor pozicije proizvoljne točke plohe određen je vektorom r:

$$r = r\left(u^1, u^2\right). \tag{2-1}$$

Ploha se naziva ***regularnom***, ako je vektorski produkt tangencijalnih vektora parametričkih linija različit od nule.

$$r_1 \times r_2 \neq 0, \tag{2-2}$$

gdje su:

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1} \quad , \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}. \tag{2-3}$$

Točke u kojima je vektorski produkt jednak nuli nazivaju se ***singularne točke*** i one ne pripadaju domeni ***D***.

Svaka regularna ploha može imati neizmjerno mnogo parametrijskih koordinatnih sustava. Kvadrat diferencijalno male dužine koja pripada domeni D poznat je pod imenom ***prve osnovne metričke forme***.

$$ds^2 = g_{11}\left(du^1\right)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}\left(du^2\right)^2. \tag{2-4}$$

Koeficijenti g_{ij} dobiju se iz skalarnih produkata tangencijalnih vektora (2-3).

$$g_{11} = r_1 \cdot r_1, \quad g_{12} = r_1 \cdot r_2, \quad g_{22} = r_2 \cdot r_2. \tag{2-5}$$

Diskriminanta prve osnovne forme (***g***) je:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^{\ 2}. \tag{2-6}$$

Za sve regularne plohe i na njima neki parametrički koordinatni sustav diskriminanta mora biti različita od nule. Ako taj uvjet u nekim točkama nije zadovoljen, točke se nazivaju ***singularnim*** i one ne mogu pripadati kartografskoj domeni.

Kad su parametričke koordinatne linije ortogonalne onda je

$$g_{12} = 0, \tag{2-7}$$

a prva osnovna metrička forma (2-4) postaje pojednostavljena:

$$ds^2 = g_{11}\left(du^1\right)^2 + g_{22}\left(du^2\right)^2 \cdot \tag{2-8}$$

Osnovni elementi plohe su diferencijalno mala dužina (*ds*), kut između dvije linije na plohi $\left(\alpha\right)$ i diferencijalno mala površina plohe (*dp*). Njihove vrijednosti ne ovise o izabranom sustavu parametričkih koordinatnih linija. Koordinatni sustav može se mijenjati, ali osnovni elementi plohe ostaju nepromijenjeni.

Kartografske projekcije uključuju dvije plohe: sferu (kuglu) i ravninu. Ako parametrijske koordinate ravnine označimo sa $\left(x^1, x^2\right)$ onda odnosi:

$$x^1 = x^1\left(u^1, u^2\right) \quad , \quad x^2 = x^2\left(u^1\right), u^2 , \tag{2-9}$$

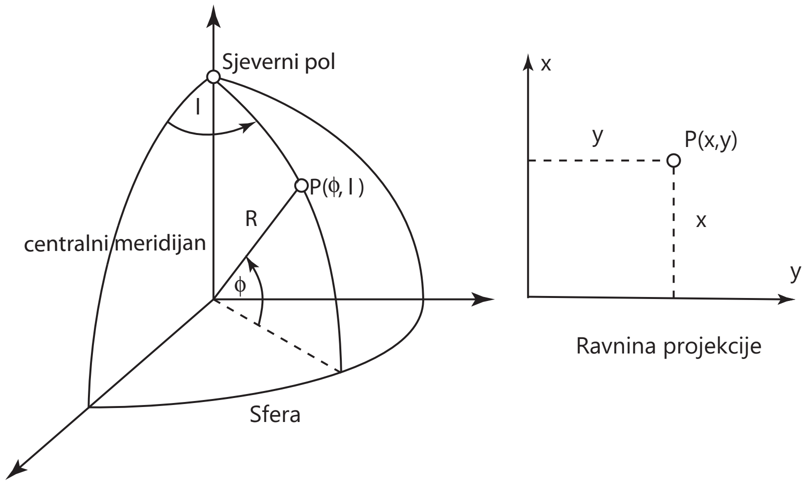
predstavljaju opći oblik kartografske projekcije neke zatvorene domene *D* na sferi u domenu Δ na ravnini. Da bi kartografske funkcije (2-9) bile i praktično značajne ograničavaju se na funkcije koje su jednoznačne, konačne, s prvom i drugom kontinuiranom derivacijom i gdje u svakoj točki domene Jacobianska determinanta različita je od nule:

$$\frac{\partial\left(x^1, x^2\right)}{\partial\left(u^1, u^2\right)} \neq 0 \cdot \tag{2-10}$$

Takav odnos među točkama dviju domena naziva se ***homeomorfizam***. Prva ploha sfere konvencionalno naziva se ***originalna ploha***, dok je ravnina ***projekcijska ploha***. Međutim, pravac projekcije može biti i obrnut, kad se ravnina projicira na sferu.
Osnovni parametrički koordinatni sustav na sferi sastoji se od ***geografske širine*** $\left(\phi\right)$ i ***geografske dužine*** $\left(\lambda\right)$. Geografska širina neke točke je kut između radijalnog vektora točke i ekvatorijalne ravnine. Po veličini širine su između 0˚ i 90˚, a po konvenciji širine južne hemisfere imaju negativan algebarski predznak. Geografska dužina je kut između ***osnovnog meridijana*** (Greenwich $\lambda = 0°$) i meridijana točke. Dužine su po veličini između 0˚ i 180˚, a istočno od osnovnog meridijana su pozitivne, dok su zapadno negativne veličine. Kako je osnovni meridijan kod većine kartografskih domena daleko od domene, u računanju se uvodi kao druga koordinata razlika dužina (*l*) koja se dobije razlikom dužine točke i dužine nekog izabranog centralnog meridijana kartografske domene:

$$l = \lambda - \lambda_0 \cdot \tag{2-11}$$

Prema tome, u kartografiji svaka točka sfere zadana je svojom širinom (ϕ) i razlikom dužine (*l*), uz poznatu dužinu centralnog meridijana $\left(\lambda_0\right)$. Mreža koordinatnih linija je sastoji se od okomitih linija ***meridijana*** $l = const.$ i ***paralela*** $\phi = const.$ U ravnini projekcije upotrebljava se ortogonalni Kartezijanski koordinatni sustav (*x,y*). U geodeziji *x*-os označuje pravac sjever-jug, dok *y*-os je u pravcu istok-zapad.



Slika 1: Dio sfere i ravnine projekcije

Osnovne formule kartografskih projekcija sfere na ravninu definirane su sa sljedeće dvije jednadžbe:

$$x = x(\phi, l) \quad , \quad z = z(\phi, l). \tag{2-12}$$

Prva osnovna metrička forma na sferi u skladu s izrazom (2-4) postaje:

$$ds^2 = R^2\left(d\phi^2 + cos^2\, dl^2\right), \tag{2-13}$$

a u ravnini projekcije:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2-14}$$

Kako su ortogonalne koordinate ravnine (*x,y*) funkcije sfernih koordinata (ϕ, l) (2-12) onda su njihovi diferencijali:

$$dx = x_\phi d\phi + z_l dl \quad , \quad dy = y_\phi d\phi + y_l dl, \tag{2-15}$$

a osnovna kvadratna metrička forma u projekciji (2-14) je:

$$dS^2 = g_{11} d\phi^2 + 2g_{12} d\phi dl + g_{22} dl^2. \tag{2-16}$$

Gaussovi koeficijenti metričke forme su:

$$g_{11} = x_\phi^2 + y_\phi^2 \quad , \quad g_{12} = x_\phi x_l + y_\phi y_l \quad , \quad g_{22} = x_l^2 + y_l^2. \tag{2-17}$$

U geodetskoj kartografskoj literaturi Gaussovi koeficijenti uobičajeno su dati sa simbolima *E,F* i *G*. (Frankić, 2010.)

Azimut diferencijalno malog segmenta proizvoljne krivine definiran je u projekciji sljedećim izrazom:

$$\alpha = arctan\left(cos\phi\frac{dl}{d\phi}\right), \tag{2-18}$$

Dok je smjerni kut između pravca x-osi i tog linearnog segmenta *dS*:

$$\beta = arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = arctan\left(\frac{y_\phi d\phi + y_l dl}{x_\phi d\phi + y_l dl}\right). \tag{2-19}$$

Za smjerne kutove projekcije meridijana $(\psi, \alpha = 0)$ i paralele $\left(\chi, \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ imamo:

$$\psi = arctan\left(\frac{y_\phi}{x_\phi}\right) \quad , \quad \chi = arctan\left(\frac{y_l}{x_l}\right). \tag{2-20}$$

Projekcija azimuta (α) na ravnini (α') je:

$$\alpha' = \beta - \psi, \tag{2-21}$$

ili

$$\alpha' = arctan\left(\frac{\sqrt{g}dl}{g_{11}d\phi + g_{22}dl}\right). \tag{2-22}$$

U gornjoj formuli veličina g dobije se iz već definirane jednadžbe (2-6).

Kut između parametričkih linija (meridijana i paralela) u ravnini projekcije dobije se iz izraza:

$$\theta = arccos\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right). \tag{2-23}$$

Diferencijalno mala površina sfere (*dp*) i njena projekcija (*dP*) u ravnini date su sljedećim izrazima:

$$dp = R^2 cos\phi\, d\phi\, dl \quad , \quad dP = \sqrt{g}\, d\phi\, dl. \tag{2-24}$$

Ovime smo definirali sve osnovne elemente sfere u ravnini projekcije.

3. ELEMENTI TEORIJE DEFORMACIJA

Već je u uvodu spomenuto da izometričko projiciranje dviju regularnih ploha moguće je samo onda ako su im radijusi Gaussove zakrivljenosti jednaki. Kako sfera i ravnina nemaju to svojstvo, projekcijom sfere na ravninu ne mogu se generalno sačuvati dužine. Neke druge elemente plohe, poput kutova, ili površina moguće je zadržati u svojim originalnim vrijednostima, ali dužine će kod projiciranja uvijek doživjeti neku vrstu promjena, ili ***deformacija***. Osnovni zadatak matematičke kartografije je definirati i proučiti sve vrste deformacija, a onda izabrati projekcije neke zatvorene domene koje će imati minimalne promjene, najmanje deformacije. Teorija deformacija u kartografiji razvio je M. Tissot, francuski kartograf i objavio u svojim ″Memoirs″ , a onda su je preuzeli i svi ostali moderni kartografi.
Deformacija diferencijalno malog linearnog elementa (*ds*) projiciranog sa sfere na ravninu (*dS*) definira se mjerilom (*k*):

$$k = \frac{dS}{ds} \cdot \tag{3-1}$$

Mjerilo se mijenja unutar domene od točke do toče, ali i unutar točke kao funkcija smjernog kuta (α).

$$k = k(\phi, l, \alpha) \cdot \tag{3-2}$$

Mjerilo duž parametričkih koordinatnih linija dobije se iz opće formule mjerila za dva specijalna slučaja kad je $\alpha = 0$ i $\alpha = \frac{\pi}{2}$. U tom slučaju:

$$m = \frac{\sqrt{g_{11}}}{R} \quad , \quad n = \frac{\sqrt{g_{22}}}{R \cos \phi} \quad \cdot \tag{3-3}$$

Simbol *m* označava mjerilo duž meridijana, a *n* duž paralele. U nekom proizvoljnom pravcu α kvadrat mjerila postaje:

$$k^2 = m^2 \cos^2 \alpha + mn \cos\theta \sin 2\alpha + n^2 \sin^2 \alpha \,. \tag{3-4}$$

Ekstremne vrijednosti mjerila bit će u pravcu α_0 :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 g_{12} \cos\phi}{g_{11} \cos^2 \phi - g_{22}} \cdot \tag{3-5}$$

Rješenje posljednje trigonometrijske jednadžbe daje dva okomita pravca α_0 i $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ koji predstavljaju ***glavne pravce***. Glavni pravci su ortogonalni i na originalnoj plohi sfere, kao i na projekcijskoj ravnini.

Ako se uzme diferencijalno mala površina sfere (*dp*) i njena projekcija na ravnini (*dP*) onda njihov odnos daje ***mjerilo površina*** (*p*):

$$p = \frac{dP}{dp} \cdot \tag{3-6}$$

Tissot je uveo u matematičku kartografiju pojam ***elipse deformacije***, ili danas poznatije pod imenom ***Tissotove indikatrise***. To je elipsa čije su poluosi ekstremna mjerila ($a = k_{max.}\ za\quad \alpha = \alpha_0 \quad i \quad b = k_{min.}\quad za \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$), a veličine ekstremnih mjerila dobiju se iz izraza:

$$a = \frac{1}{2}\left(A + B\right) \quad , \quad b = \frac{1}{2}\left(A - B\right), \tag{3-7}$$

gdje su:

$$A^2 = m^2 + n^2 + 2mn sin\theta \quad , \quad B^2 = m^2 + n^2 - 2mn sin\theta \cdot \tag{3-8}$$

U formulama (3-4), (3-5) i (3-8) parametrički ugao (θ) računa se iz jedne od sljedeće dvije formule:

$$cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad , \quad tan\theta = \frac{\sqrt{g}}{g_{12}} \cdot \tag{3-9}$$

Sve formule teorije deformacija mogu se izraziti kao funkcije elemenata Tissotove indikatrise. Tako, na primjer, orijentacijski kut projekcije meridijana obzirom na prvi glavni pravac na sferi je:

$$sin\beta = \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{a^2 - b^2}}, \tag{3-10}$$

a njegova projekcija u ravnini:

$$tan\beta' = \frac{b}{a} tan\beta \cdot \tag{3-11}$$

Linearno mjerilo (k) u proizvoljnom pravcu $\left(\delta\right)$ od prvog glavnog pravca je:

$$k_\delta^2 = a^2 cos^2\delta + b^2 sin^2\delta \,. \tag{3-12}$$

Kutna deformacija $\left(\omega\right)$ dobije se kao razlika kuta na sferi i njegove projekcije na ravnini:

$$\omega = \delta - \delta', \tag{3-13}$$

a njena vrijednost računa se iz izraza:

$$sin\omega = \frac{a-b}{a+b} sin\left(\delta - \delta'\right) \cdot \tag{3-14}$$

Maksimalna vrijednost kutne deformacije $\left(\omega_0\right)$ je:

$$sin\omega_0 = \frac{a-b}{a+b} \cdot \tag{3-15}$$

Mjerilo površina (p) (3-6) također se može izraziti kao funkcija glavnih mjerila:

$$p = ab \,. \tag{3-16}$$

4. LOKALNE MJERE KVALITETE KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA

Svaka projekcija sfere, ili jednog njenog dijela, na ravninu rezultirat će deformacijama dužina. Izborom posebnih kartografskih funkcija možemo sačuvati kutove (konformne projekcije), ili površine (ekvivalentne projekcije), ali dužine će generalno uvijek biti promijenjene sve dok regularne plohe uključene u koordinatne transformacije nemaju istu Gaussovu zakrivljenost. Već je u uvodu rečeno da je Gaussov radijus zakrivljenosti sfere jednak njenom radijusu (*R*), a za ravninu je neizmjerno velik, pa izometričko kartiranje sfere na ravninu nije moguće. Sve kartografske projekcije mijenjaju dužine i zbog toga je deformacija dužina, ili neka njena funkcija, najbolji kriterij za vrednovanje kvalitete kartografskih projekcija.
Deformacija dužine (v) u nekoj točki i definiranom pravcu određuje se razlikom mjerila (k) i njegove idealne vrijednosti jedinice.

$$v = k - 1. \tag{4-1}$$

Mjerilo (k) je kod generalnih projekcija funkcija mjesta i pravca, ali njegova deformacija (4-1) nije primijenjena u kartografiji jednoznačno, već postoji nekoliko verzija. Tako, na primjer, linearna deformacija se može definirati i sljedećom formulom:

$$v' = 1 - \frac{1}{k} \cdot \tag{4-2}$$

Čebišev, Weber i Markov, među mnogim znanstvenicima na polju matematičke kartografije, definirali su linearnu deformaciju prirodnim logaritmom mjerila:

$$v'' = \ln k. \tag{4-3}$$

Kod koničnih projekcija (konusnih, cilindričnih i azimutalnih) za deformaciju se katkad upotrebljavao izraz:

$$v''' = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right). \tag{4-4}$$

Sve ove četiri definicije su funkcije linearnog mjerila.

$$k = 1 + v = \frac{1}{1 - v'} = e^{v''} = \sqrt{1 + 2v'''} \cdot \tag{4-5}$$

Pojedine definicije deformacija razlikuju se u veličinama drugog reda. U biti Čebiševljeva definicija deformacije (4-4) kao prirodnog logaritma mjerila pokazala se najboljom, jer kod optimizacije konformnih projekcija direktno vodi do minimalne deformacije površina, a kod ekvidistantnih i ekvivalentnih projekcija do minimalne deformacije kutova. Slični se rezultati ne postižu kod primjene drugih definicija deformacije. Upravo se zbog toga preporuča Čebiševljeva definicija linearne deformacije.
Godine 1861. Engleski astronom G.B. Airy (1861) učinio je prvi ozbiljni pokušaj definicije ***mjere lokalne kvalitete*** $\left(\varepsilon_A^2\right)$ za proizvoljne kartografske projekcije. Njegova prva definicija imala je formu:

$$\varepsilon_A^2 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + \left(ab - 1\right)^2, \tag{4-6}$$

ali je kasnije kod postupka optimizacije prihvatio drugu, jednostavniju verziju, koju bi mogli nazvati ***srednja varijanca linearne deformacije***:

$$\varepsilon_A^2 = \frac{1}{2}\left(v_a^2 + v_b^2\right), \tag{4-7}$$

gdje su ekstremne lokalne deformacije definirane kao:

$$v_a = a - 1 \quad , \quad v_b = b - 1 . \tag{4-8}$$

Airyjeve dvije mjere lokalne deformacije (4-6) i (4-7) razlikuju se u članovima trećeg reda.

Godine 1896. Njemački geodet W. Jordan preporučio je bolju i realističniju definiciju mjere lokalne kvalitete i njegova ***srednja kvadratna deformacija udaljenosti*** bila je definirana formulom:

$$\varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(k - 1\right)^2 d\alpha \cdot \tag{4-9}$$

u kojoj α predstavlja smjerni kut mjeren od prvog glavnog pravca (Meščerjakov, 1968).

Kavrajski (1959) je modificirao srednje kvadratne deformacije Airya i Jordana s logaritamskom definicijom linearnih deformacija (4-3) i tako dobio lokalne mjere kvalitete kartografskih projekcija koje danas nazivamo Airy-Kavrajski i Jordan Kavrajski:

$$\varepsilon_{AK}^2 = \frac{1}{2}\left(\ln^2 a + \ln^2 b\right) \tag{4-10}$$

i

$$\varepsilon_{JK}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^2 k \, d\alpha \cdot \tag{4-11}$$

S teoretskog stanovišta Jordanova definicija lokalne mjere linearne deformacije je bolja od Airyeve, ali postupci optimizacije kartografskih projekcija rezultirali su sličnim vrijednostima parametara kod obje definicije. Njihove neznatne razlike su premalene da bi se mogla opravdati mjera Jordan-Kavrajski, koja je mnogo kompliciranija od Airy-Kavrajski.

5. MJERE KVALITETE ZATVORENIH KARTOGRAFSKIH DOMENA

Dosadašnje mjere kvalitete kartografskih projekcija bile su definirane u pojedinim točkama domene, ali ne i za cijelu domenu koja se projicira na ravninu. Naravno, lokalne mjere kvalitete mogle bi se izračunati za niz točaka domene i tako dobivene rezultate za razne kartografske projekcije trebalo bi onda usporediti, ali općenito, takav postupak vodi do niza nejasnoća i subjektivnih odluka obzirom na izbor točaka u kojima se deformacije računaju. Da bi se takve poteškoće reducirale na podnošljivi minimum Airy uvodi ***srednju kvadratnu linearnu deformaciju domene***:

$$E_A^2 = \frac{1}{2D}\int_D \left(v_a^2 + v_b^2\right) dD, \tag{5-1}$$

a integriranje se proteže na čitavu kartografsku domenu (*D*). S logaritamskom definicijom lokalne mjere (4-3) posljednja formula postaje ***kriterij Airy-Kavrajskog najboljih kartografskih projekcija***:

$$E_{AK}^2 = \frac{1}{2D}\int_D \left(ln^2\, a + ln^2\, b \right) dD \cdot \tag{5-2}$$

Kad se umjesto definicije Airy-Kavrajskog upotrijebi verzija ***Jordan-Kavrajskog*** (4-11), ***kriterij najboljih projekcija*** postaje:

$$E_{JK}^2 = \frac{1}{2\pi D}\int_D \int_0^{2\pi} ln^2\, k\; d\alpha\; dD \cdot \tag{5-3}$$

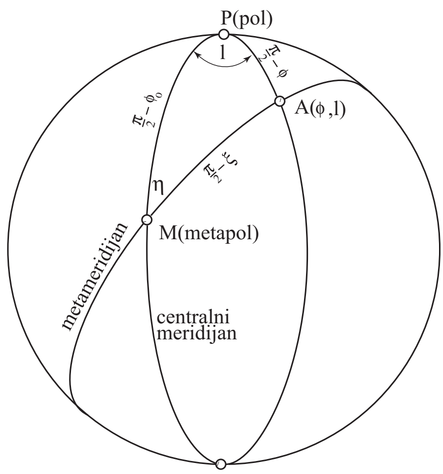
I kod jedne i kod druge formule (5-2) i (5-3) domene moraju biti analitički definirane, što je slučaj kod vrlo malog broja kartografskih domena, a osim toga podintegralne funkcije moramo moći analitički integrirati. Ukoliko to nije slučaj integrali se ne mogu analitički riješiti. Međutim, ako prijeđemo na numeričko integriranje onda oba ova problema nestaju. Zapravo, u prvim radovima optimizacije (Airy, 1861) i (Young, 1920) autori su uzimali analitički definirane granice domena, ali u današnje vrijeme modernih i brzih elektroničkih kompjutora integriranje je vrlo jednostavan, pouzdan i stabilan postupak i analitička integracija može se potpuno zamijeniti numeričkom. Granice kartografskih domena sastoje se većinom od zatvorenog poligona točaka, a originalna površina sfere zamijeni se velikim brojem malih površinskih elemenata, sfernih trapeza, koje ograničava mreža meridijana i paralela i u gravitacijskim točkama tih površinskih elemenata računaju se lokalni elementi linearne kvalitete projekcija. Kavrajski je preporučio jednostavnu sumu srednjih kvadratnih linearnih deformacija. S druge strane,Young je smatrao da je bolje upotrijebiti regularnu mrežu u projekcijskoj ravnini. Zašto bi takva mreža bila bolja teško je razumjeti, a kako je ona istovremeno i kompliciranija preporuča se postupak Kavrajskog.

6. SUSTAV METAKOORDINATA NA SFERI

Prirodnost nekog koordinatnog sustava u matematičkoj kartografiji nije uobičajen stručni termin. On se ovdje odnosi na jednostavnost matematičkog izraza kod projekcije kartografske domene sa sfere na ravninu. Oni koordinatni sustavi koji će kod projiciranja dati najjednostavniju matematičku formu nazivamo ***prirodnim***. To se posebno odnosi na primjeru ***koničnih projekcija***, a to je zbirna imenica za ***konusne, azimutalne i cilindrične projekcije***. Naime, azimutalne i cilindrične projekcije mogu se tretirati kao specijalni slučajevi konusnih projekcija (Frankić, 2010). Po sugestiji kanadskog matematičara i kartografa T. Wray-a (1974) sistem prirodnih koordinata na sferi nazivamo ***metakoordinate***. Mreža metakoordinatnih linija je u formi identična mreži geografskih linija (meridijana i paralela), ali se položaj metapola može nalaziti bilo gdje na sferi. Ako su geografske koordinate metapola zadane širinom (ϕ_0) i razlikom dužine (l_0) onda je metakoordinatni sustav potpuno definiran. Veliki krugovi koji prolaze kroz metapol (*M*) zovu se ***metameridijani***, a presjeci sfere s ortogonalnim ravninama na metameridijane su ***metaparalele***. Metaparalele se definiraju s ***metaširinom*** (ξ), a metameridijani s ***metadužinom*** (η). Kad su poznate pozicije metapola (ϕ_0, l_0) i geografske koordinate proizvoljne točke (ϕ,l) lako se mogu izračunati metakoordinate točke primjenom sferne trigonometrije:

$$\xi = arcsin\left(sin\phi_0\, sin\phi + cos\phi_0\, cos\phi\, cos\, l\right) \qquad (6\text{-}1)$$

$$\eta = arctan\left(\frac{cos\phi\, sin\, l}{sin\phi\, cos\phi_0 - cos\phi\, sin\phi_0\, cos\, l}\right). \qquad (6\text{-}2)$$



Slika 2: Metakoordinate na sferi

U slučaju primjene metakoordinata (ξ,η) kartografska projekcija postaje dvostruka projekcija. Prvo se geografske koordinate (ϕ,l) transformiraju u metakoordinate (ξ,η), a ove se na kraju projiciraju u ravninu (*x,y*):

(ϕ,l)	$\Rightarrow$	(ξ,η)	$\Rightarrow$	(x,y)
sfera		metasfera		ravnina

Obzirom na položaj metapola prema geografskom polu konične se projekcije dijele u tri ***aspekta***:

(1) Standardne ili uspravne projekcije $(\phi_0 = 90°)$,

(2) Kose projekcije $(0° \prec \phi_0 \prec 90°)$ i

(3) Transverzne ili poprečne projekcije $(\phi_0 = 0°)$.

Kod ***standardnih*** ili ***uspravnih projekcija*** metakoordinate su identične s geografskim koordinatama. Kod ***kosog aspekta*** projekcije primjenjuju se za svaku točku kartografske domene formule (6-1) i (6-2), a tek se onda transformiraju na ravninu odabrane konične projekcije. ***Za transverzne ili poprečne projekcije*** prijelaz sa sfere na metasferu je pojednostavljen, jer je geografska širina metapola jednaka nuli $\left(\phi_0 = 0\,, sin\phi_0 = 0\,, cos\phi_0 = 1\right)$, pa zbog toga formule (6-1) i (6-2) poprimaju formu:

$$\xi = arcsin\left(cos\,\phi\, cos\, l\right) \tag{6-3}$$

$$\eta = arctan\left(\frac{sin\, l}{tan\,\phi}\right). \tag{6-4}$$

Vrsta parametričke koordinatne mreže utječe na kvalitetu kartografske mreže i njene deformacije i kod pronalaženja najboljih projekcija položaj metapola postaje utjecajan faktor. Da bi se postupak optimizacije ubrzao i osigurala nužna konvergencija parametara neke projekcije, generalno je potrebno pronaći približne vrijednosti metapola. Obzirom na svojstva ***koničnih projekcija*** kod transformacije sfere na ravninu treba znati da kod ***azimutalnih projekcija*** najpovoljnije područje domene s minimalnim deformacijama nalazi se oko metapola. Metapol je ***glavna točka*** azimutalnih projekcija. Kod ***konusnih projekcija*** minimalne deformacije su oko jedne metaparalele i ona postaje ***glavna linija projekcije***, a za ***cilindrične projekcije*** optimalno područje domene je oko metaekvatora i zbog toga u tom je slučaju metaekvator glavna linija. Znajući to, zavisno o obliku i veličini kartografske domene i izabranoj projekciji, moguće je definirati približan položaj metapola, na primjer, kao centralne točke domene kod azimutalnih projekcija, ili glavne linije kod konusnih i cilindričnih projekcija. Kod cilindričnih projekcija glavna linija je metaekvator, koji se definira s dvije točke domene koje pripadaju približnoj liniji metaekvatora oko koje želimo imati najmanje deformacije. Konačno, kod konusnih projekcija glavna linija je metaparalela, koja se određuje s tri točke domene.
U postupku određivanja najboljih koničnih projekcija položaj metapola određuje se sa sljedeća tri postupka:

Azimutalne projekcije:

$$\phi_0 = \frac{1}{2}\left(\phi_J + \phi_S\right) \quad , \quad l_0 = \frac{1}{2}\left(l_I + l_Z\right). \tag{6-5}$$

U tim formulama ϕ_J i ϕ_S su širine krajnjih paralela domene: južne i sjeverne. Na isti način l_I i l_Z označuju istočni i zapadni granični meridijan.

Cilindrične projekcije:

Kod cilindričnih projekcija moraju se odrediti dvije točke približnog metaekvatora: $1\left(\phi_1, l_1\right)$ i $2\left(\phi_2, l_2\right)$, a nakon toga slijedi računanje koordinata metapola:

$$x_0 = cos\,\phi_1\, sin\, l_1\, sin\,\phi_2 - cos\,\phi_2\, sin\, l_2\, sin\,\phi_1 \tag{6-6}$$

$$y_0 = cos\,\phi_2\, cos\, l_2\, sin\,\phi_1 - cos\,\phi_1\, cos\, l_1\, sin\,\phi_2 \tag{6-7}$$

$$z_0 = cos\,\phi_1\, cos\,\phi_2\, sin\left(l_2 - l_1\right) \tag{6-8}$$

$$\phi_0 = arcsin\left(z_0\right) \tag{6-9}$$

$$l_0 = arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right). \tag{6-10}$$

Konusne projekcije:

Kod konusnih projekcija određuje se približna metaparalela, a za njeno definiranje potrebne su tri točke: $1\left(\phi_1, l_1\right)$, $2\left(\phi_2, l_2\right)$, $3\left(\phi_3, l_3\right)$. Prvo se izračuna šest koeficijenata:

$$A = \left(sin\phi_2 - sin\phi_1\right)\left(cos\phi_3\, cos\, l_3 - cos\phi_1\, cos\, l_1\right) \tag{6-11}$$

$$B = \left(sin\phi_3 - sin\phi_1\right)\left(cos\phi_2\, cos\, l_2 - cos\phi_1\, cos\, l_1\right) \tag{6-12}$$

$$C = \left(sin\phi_3 - sin\phi_1\right)\left(cos\phi_2\, sin\, l_2 - cos\phi_1\, sin\, l_1\right) \tag{6-13}$$

$$D = \left(sin\phi_2 - sin\phi_1\right)\left(cos\phi_3\, sin\, l_3 - cos\phi_1\, sin\, l_1\right) \tag{6-14}$$

$$E = \left(cos\phi_2\, cos\, l_2 - cos\phi_1\, cos\, l_1\right)\left(cos\phi_3\, sin\, l_3 - cos\phi_1\, sin\, l_1\right) \tag{6-15}$$

$$F = \left(cos\phi_3\, cos\, l_3 - cos\phi_1\, cos\, l_1\right)\left(cos\phi_2\, sin\, l_2 - cos\phi_1\, sin\, l_1\right) \tag{6-16}$$

Iz ovih koeficijenata dobiju se komponente metapola:

$$x_0 = A - B \quad , \quad y_0 = C - D \quad , \quad z_0 = E - F \,, \tag{6-17}$$

a pomoću izraza (6-9) i (6-10) računaju se geografske koordinate metapola.

7. OPTIMIZACIJA PROJEKCIJA I METODA NAJMANJIH KVADRATA

Ako se prihvati kriterij Airy-Kavrajskog, definiran jednadžbom (5-2)

$$E_{AK}^2 = \frac{1}{2D}\int\left(ln^2\, a + ln^2\, b\right) dD = min\,, \tag{7-1}$$

uvjet najbolje projekcije neke klase je minimalna vrijednost gornjeg izraza. U tom izrazu D je površina kartografske domene, a integracija se proteže na čitavu domenu. Kartografske domene su rijetko analitički definirane, osim kad se prikazuje čitav Svijet, ili jedna njegova polutka. Kod uobičajenih neregularnih granica domena analitičko integriranje je nemoguće. Čak i u slučajevima kad je domena definirana regularnom funkcijom analitičko integriranje može biti vrlo složeno, ili nemoguće. Problem se može riješiti jednostavnom numeričkom integracijom. U tom slučaju numerička aproksimacija kriterija Airy-Kavrajskog (7-1) postaje:

$$E_{AK}^2 = \frac{1}{2D}\, E_{AK}^2 = \frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(v_a\right)_i^2 + \left(v_b\right)_i^2\right]\Delta D_i = min \cdot \tag{7-2}$$

U kriteriju Airy-Kavrajski (7-2) veličine:

$$v_a = \ln a \quad , \quad v_b = \ln b, \tag{7-3}$$

su prirodni logaritmi poluosi Tissotove indikatrise (3-7), a ΔD mali površinski element domene, dok je n totalni broj površinskih elemenata domene. Parametri transformacije (7-3) računaju se za centralnu točku svakog površinskog elementa. Zbog jednostavnosti numeričkog postupka preporuča se podijeliti kartografsku domenu regularnom mrežom meridijana i paralela čime se domena aproksimira velikim brojem malih sfernih trapezoida. Površina jednog od njih računa se iz izraza sferne trigonometrije:

$$\Delta D = 2R^2 \left(l_2 - l_1\right) \sin\frac{1}{2}\left(\phi_2 - \phi_1\right) \cos\frac{1}{2}\left(\phi_2 + \phi_1\right) \cdot \tag{7-4}$$

U gornjoj formuli R je radijus sfere. Za male razmake između meridijana i paralela elementarni dio domene postaje:

$$\Delta D = R^2 \Delta\phi \, \Delta l \cos\phi, \tag{7-5}$$

gdje su:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad , \quad \Delta l = l_2 - l_1, \tag{7-6}$$

a

$$\sin\frac{1}{2}\left(\phi_2 - \phi_1\right) = \frac{1}{2}\left(\phi_2 - \phi_1\right) \cdot \tag{7-7}$$

Geografske koordinate u formuli (7-5) odnose se na centralnu točku površinskog elementa domene. Daljnje pojednostavljenje u računanju postiže se kad su razmaci među meridijanima i paralelama jednaki za čitavu domenu:

$$K = \Delta\phi = \Delta l \,. \tag{7-8}$$

U ovom slučaju kriterij Airy-Kavrajski (7-2) postaje:

$$\hat{E}^2_{AK} = \frac{K^2 R^2}{2D} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(v_a\right)_i^2 + \left(v_b\right)_i^2 \right] \cos\phi = \min \cdot \tag{7-9}$$

Kako je pred znakom zbrajanja konstanta uvjet najboljih projekcija po kriteriju Airy-Kavrajski se reducira na:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(v_a\right)_i^2 + \left(v_b\right)_i^2 \right] \cos\phi = \min. \tag{7-10}$$

Taj uvjet nije ništa drugo nego minimalizacija Euklidske norme, a ona predstavlja ***problem metode najmanjih kvadrata***. Nepoznati parametri neke kartografske projekcije, u koju spadaju koordinate metapola i razne konstante projekcije, određuju se tako da suma kvadrata glavnih deformacija pomnožena s kosinusovom funkcijom geografske širine bude minimalna. Parametrički matematički model metode najmanjih kvadrata (Frankić, 2010) zahtijeva da se svaka glavna deformacija (7-3) izrazi kao eksplicitna funkcija nepoznatih parametara. U ovom slučaju treba izraziti prirodne logaritme glavnih mjerila kao funkcije nepoznatih konstanti. U svakoj centralnoj točki površinskog elementa domene odrede se glavna mjerila (a,b) pomoću formula (3-7), (3-8) i (3-9). Generalna formula za vektor deformacija **v** kao funkcija vektor parametara ***c*** glasi:

$$v = f(c)\cdot \tag{7-11}$$

Matematički model (7-11) je u svom općem obliku nelinearan, a za standardnu primjenu metode najmanjih kvadrata treba ga transformirati ***Newtonovom metodom*** u linearnu formu.

$$v = f\left(c^0 + \Delta c\right) = f\left(c^0\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_0 \Delta c. \tag{7-12}$$

Vektor c^0 predstavlja ***vektor približnih vrijednosti nepoznatih parametara***, Δc je ***vektor korekcija***, a ***Jacobianska matrica*** parcijalnih derivacija deformacija po parametrima definirana je kao:

$$B = \frac{\partial f}{\partial c}\cdot \tag{7-13}$$

Ako označimo vektor funkcija približnih vrijednosti nepoznatih parametara $f\left(c^0\right) = v^0$, dobit ćemo konačnu verziju linearnog matematičkog modela:

$$v = B\,\Delta c + v^0\cdot \tag{7-14}$$

Sad se definira striktno dijagonalna matrica ***P*** čija dimenzija je $2n \times 2n$, a čiji elementi su kosinusi geografskih širina i to tako da su po dva člana ista.

$$P = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_1 & ..... & 0 & 0 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & 0 & ..... & \cos\phi_n & 0 \\ 0 & 0 & ..... & 0 & \cos\phi_n \end{bmatrix}. \tag{7-15}$$

Uz definiran vektor deformacija ***v*** (7-14) i matrice ***P*** (7-15) uvjet najboljih projekcija po kriteriju Airy-Kavrajskog (7-10) postaje:

$$v^T P v = min\,, \tag{7-16}$$

gdje je:

$$v^T = \left[(v_a)_1 (v_b)_1 (v_a)_2 (v_b)_2 .... (v_a)_n (v_b)_n\right]\cdot \tag{7-17}$$

Postupak optimizacije dat će vektor deformacija ***v*** (7-17) i vektor nepoznatih parametara ***c*** čiji elementi se sastoje od geografskih koordinata metapola i konstanti projekcije:

$$c^T = \left[\phi_0 \quad l_0 \quad c_1 \quad ...... \quad c_m\right]\cdot \tag{7-18}$$

Kad se izraz (7-14) uvrsti u uvjet minimuma (7-16), znajući da uvjet minimuma zahtijeva da prva derivacija Airy-Kavrajskog kriterija po vektoru nepoznatih parametara bude jednaka nuli, dobije se sustav jednadžbi koje nazivamo ***normalne jednadžbe***:

$$\frac{\partial\left(v^T Pv\right)}{\partial c} = B^T PB\, \Delta c + B^T Pv^o = 0 \cdot \tag{7-19}$$

Rješenje normalnih jednadžbi daje vektor korekcija približnih vrijednosti Δc nepoznatih parametara:

$$\Delta c = -\left(B^T PB\right)^{-1}\left(B^T Pv^0\right), \tag{7-20}$$

a procijenjene vrijednosti nepoznatih parametara su:

$$\hat{c} = c^0 + \Delta c. \tag{7-21}$$

Ovaj se postupak primjenjuje iterativno, tako da svaki novoprocijenjen vektor $\hat{c}$ postaje nova aproksimacija i računski se postupak ponavlja sve dok vrijednost vektora korekcije Δc ne postane beznačajno mala. Ovo, naravno, podrazumijeva da postoji konvergencija iterativnog postupka, a ako ona ne postoji očito su prve aproksimacije nepoznatih parametara krivo procijenjene. Kad je konvergencija prisutna i kad se izračunaju posljednje vrijednosti vektora popravaka dobili smo konstante najbolje projekcije iz te grupe, a njena mjera kvalitete dobije se iz kriterija Airy-Kavrajskog:

$$\hat{E}^2_{AK} = \frac{K^2}{2D} v^T Pv. \tag{7-22}$$

Metoda najmanjih kvadrata poznata je matematičkoj kartografiji od početka 20-og stoljeća. Godine 1913. Zinger (Kavrajski, 1959) prvi je izračunao konstante Lambertove konformne konusne projekcije primijenivši metodu najmanjih kvadrata. Godine 1934. Kavrajski je izračunao sve konstante uspravnih koničnih projekcija, a Urmajev je 1953. riješio problem simetričnih Čebiševljevih projekcija metodom najmanjih kvadrata. Konačno je Tobler godine 1977. preporučio optimalnu projekciju s minimalnim distorzijama udaljenosti, ali je pritom dobio numeričke vrijednosti koordinata u projekcijskoj ravnini za mrežu točaka čije su pozicije na sferi bile poznate, a ne analitički izraz za računanje. Za točke koje nisu pripadale originalnoj mreži na sferi morala se izvršiti numerička interpolacija da bi se dobile koordinate u projekciji.
Metoda najmanjih kvadrata je vrlo jednostavan i elegantan način dobivanja najboljih projekcija neke klase, ali na početku iterativnog postupka zahtijeva prilično dobru procjenu nepoznatih parametara koji će osigurati konvergenciju. Glavna dodatna poteškoća primjene metode najmanjih kvadrata je formiranje matrice ***B***. Kao ilustraciju postupka optimizacije koničnih projekcija uzet ćemo tri primjera: Lambertovu konformnu konusnu projekciju, ekvidistantnu konusnu projekciju i Lambertovu ekvivalentnu cilindričnu projekciju. Izvode tih projekcija možete naći u (Frankić, 2010).

Lambertova konformna konusna projekcija definirana je sljedećim izrazima:

$$x = K - \rho\cos\gamma\ ,\ y = \rho\sin\gamma\ ,\ \rho = \frac{K}{U^c}, U = tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\xi}{2}\right), \gamma = c\eta \tag{7-23}$$

$$a = b = \frac{cK}{U^c R\cos\xi}. \tag{7-24}$$

Deformacije (7-3) kod konformnih projekcija jednake su u svim pravcima:

$$v = v_a = v_b = ln\left(\frac{cK}{U^c R\cos\xi}\right), \tag{7-25}$$

a kriterij Airy-Kavrajski (7-9) zbog konformnosti je pojednostavljen:

$$\hat{E}^2_{AK} = \frac{\Delta\phi\, \Delta l\, R^2}{D}\sum_{i01}^{n}\left(v_i\right)^2 \cos\phi = min\cdot \tag{7-26}$$

Jacobianska matrica (***B***) ima četiri stupca, jer postoje četiri nepoznata parametra: ϕ_0, l_0, c, K a broj redova jednak je broju malih površinskih elemenata (n):

$$b(i,1) = \frac{\partial v}{\partial \phi_0} = \left(tan\,\xi_1 - \frac{c}{cos\,\xi_i}\right)t_i \quad i = 1,.....,n \tag{7-27}$$

$$t_i = \frac{d\xi}{d\phi_0} = \left(cos\,\phi_0\, sin\,\phi_i - sin\,\phi_0\, cos\,\phi_i\, cos\, l\right)\frac{1}{cos\,\xi_i} \tag{7-28}$$

$$b(i,2) = \frac{\partial v}{\partial l_0} = \left(tan\,\xi_i - \frac{c}{cos\,\xi_i}\right)u_i \quad i = 1,.....,n \tag{7-29}$$

$$u_i = \frac{d\eta}{dl_0} = \left(cos\,\phi_0\, cos\,\phi_i\, sin\, l\right)\frac{1}{cos\,\xi_1} \tag{7-30}$$

$$b(i,3) = \frac{\partial v}{\partial c} = \frac{1}{c} - ln\left(U_i\right) \quad i = 1,.....,n \tag{7-31}$$

$$b(i,4) = \frac{\partial v}{\partial K} = \frac{1}{K} \quad i = 1,.....,n\cdot \tag{7-32}$$

Ekvidistantna konusna projekcija definirana je jednadžbama:

$$x = K - \rho\cos\gamma,\ y = \rho\sin\gamma,\ \gamma = c\eta,\ \rho = K - R\xi,\ m = 1,\ n = \frac{c\rho}{R\cos\xi}. \tag{7-33}$$

Deformacije glavnih mjerila (a,b) kod konusnih projekcija jednake su deformacijama parametričkih linija (m,n).

$$v_i = ln\left(c\left(K - R\xi_i\right)\right) - ln\left(R\cos\xi_i\right)\cdot \tag{7-34}$$

Elementi matrice ***B*** su:

$$b(i,1) = \left(tan\,\xi_i - \frac{R}{K - R\xi_i}\right)t_i \tag{7-35}$$

$$b(i,2) = \left(tan\,\xi_i - \frac{R}{K - R\xi_i}\right)u_i \tag{7-36}$$

$$b(i,3)=\frac{1}{c} \tag{7-37}$$

$$b(i,4)=\frac{1}{K-R\xi_i}\cdot \tag{7-38}$$

Pomoćne funkcije (t_i , u_i) u jednadžbama (7-35) i (7-36) dobivaju se opet iz izraza (7-28) i (7-30).

Lambertova cilindrična ekvivalentna projekcija definirana je jednadžbama:

$$x=\frac{R}{c}sin\xi,\quad y=c\eta,\quad m=\frac{R\,cos\xi}{c},\quad n=\frac{1}{m}=\frac{c}{R\,cos\xi}\cdot \tag{7-39}$$

I kod cilindričnih projekcija su glavna mjerila (a,b) identična s mjerilima duž parametričkih linija metameridijana i metaparalela (m,n), pa će deformacije glavnih mjerila biti:

$$v(2i-1)=ln\,R+ln\,cos\,\xi_i-ln\,c\quad,\quad v(2i)=-v(2i-1). \tag{7-40}$$

Elementi matrice ***B*** su:

$$b(2i-1.1)=tan\,\xi_i\,t_i, \tag{7-41}$$

$$b(2i,1)=-b(2i-1,1), \tag{7-42}$$

$$b(2i-1,2)=tan\,\xi_i\,u_i, \tag{7-43}$$

$$b(2i-1,3)=\frac{1}{c}, \tag{7-44}$$

$$b(2i,3)=-b(2i-1,3)\cdot \tag{7-45}$$

U ovom posljednjem slučaju cilindrične ekvivalentne projekcije dijagonalna matrica ***P*** ima dimenziju *2n* x *2n*, a pojedini elementi računaju se pomoću algoritma:

$$P\left\{p(2i-1,2i-1)=p(2i,2i)=cos\,\xi_i\quad za\;i=1,.....,n\right\}\cdot \tag{7-46}$$

U prva dva primjera matrica P ima dimenzije n x n i dobije se pomoću sličnog algoritma:

$$P\left\{p(i,i)=cos\,\xi_i\quad zai=1,.....n\right\}\cdot \tag{7-47}$$

Ovakva optimizacija, pokazana samo na nekoliko poznatih projekcija, nije ograničena na konične projekcije, već se može primijeniti na bilo koju analitički definiranu kartografsku projekciju. Treba imati jasnu analitičku definiciju pravokutnih koordinata (*x,y*) kao funkcije nepoznatih parametara. Jacobianova matrica zahtijeva parcijalnu derivaciju vektora deformacija obzirom na vektor nepoznatih parametara. Na kraju, primjena metode najmanjih kvadrata je rutina koja se ponavlja kod svake projekcije.

8. ČEBIŠEVLJEVE PROJEKCIJE

Godine 1856. ruski matematičar ***Čebišev*** formulirao je teorem o najboljim transformacijama iz klase konformnih projekcija. Zbog toga konformna preslikavanja u kojima su promjene mjerila najmanje nazivamo ***Čebiševljevim projekcijama***. Drugim riječima, odnos maksimalnog i minimalnog mjerila za čitavu domenu, koju definira zatvorena kontura, je najmanje mogući. Kako mjerilo u tim projekcijama ne odstupa mnogo od jedinice to njegov prirodni logaritam ne odstupa mnogo od nule. ***Čebiševljev teorem*** glasi (Biernacki, 1965): ″Nužan i dovoljan uvjet da neka konformna projekcija zatvorene domene bude i najbolja je da joj mjerilo duž granične konture ima konstantnu vrijednost″. U tom slučaju Poissonova jednadžba (Frankich, 1982) ima oblik:

$$\frac{\partial^2 \ln m}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \ln m}{\partial l^2} = \operatorname{sec} h^2 q \,, \tag{8-1}$$

a za graničnu vrijednost:

$$\operatorname{sec} h^2 q = const. \tag{8-2}$$

Ne gubi se ništa na općenitosti ako se pretpostavi da je ta konstanta jednaka nuli, a time se čitav problem reducira na rješenje ***Dirichletovog problema*** s nultim graničnim vrijednostima. Čebišev nije ostavio matematički dokaz svog teorema. Mnogo kasnije godine 1896. drugi ruski matematičar ***D.A. Grave*** dokazao je ispravnost teorema. Od tog vremena mnogi autori govore o ***Čebišev-Grave teoremu konformnog preslikavanja***. Dokaz teorema može se naći u (Meščerjakov, 1968). Međutim, treba naglasiti da vrlo mali broj kartografskih domena ima pravilnu matematički definiranu granicu. Velika većina domena kartografskih projekcija su nepravilna oblika i u tim slučajevima nemoguće je riješiti Poissonovu jednadžbu (8-1) a da bi Čebiševljev kriterij bio potpuno zadovoljen. Ako je granica kartografske domene neki nepravilni poligon onda će Čebiševljeve projekcije imati samo približno rješenje. Većina praktičnih rješenja spada u jednu od dvije moguće grupe. U prvu grupu rješenja spadaju ona koja vode do teoretski korektnog konformnog preslikavanja, ali Čebiševljevi granični uvjeti nisu potpuno zadovoljeni. Granični poligon zamijenjen je krivuljom duž koje mjerilo ima konstantnu vrijednost. Tu spadaju i sve konformne projekcije domena čije parametre određujemo metodom najmanjih kvadrata. U drugu grupu rješenja spadaju ona koja ne vode do pravog konformnog preslikavanja, a to znači da Poissonova jednadžba nije potpuno zadovoljena u svakoj točki domene, ali su zato granični uvjeti konstantnog mjerila zadovoljeni. Do sada najpoznatiju metodu tog tipa dao je njemački inženjer ***W. Ritz*** godine 1908. Po njemu se takve projekcije zovu ***Ritzove projekcije***.

Na kraju treba spomenuti još jednu važnu karakteristiku Čebiševljevih projekcija. Mjerilo površina (p) kod konformnih projekcija dobiva se iz jednadžbe (3-16) i glasi:

$$p = ab = m^2 \cdot \tag{8-3}$$

Čebiševljeve projekcije su optimalne zbog najmanje linearne deformacije ($v = \ln m$), ali su i istovremeno optimalne obzirom na deformacije površina:

$$\ln p = 2 \ln m \cdot \tag{8-4}$$

Zbog toga su Čebiševljeve projekcije i najbliže ekvivalentnim kartografskim projekcijama. Od svih mogućih preslikavanja Čebiševljeve projekcije imaju najmanju deformaciju površina, osim, naravno, ekvivalentnih.

Određivanje stvarne Čebiševljeve projekcije neke zatvorene domene na sferi može se podijeliti na tri koraka. Prvo se površina Zemlje transformira konformno na ravninu izotermnim koordinatama:

$$y + ix = q + il\,, \tag{8-5}$$

a to je u stvari Mercatorova projekcija sfere jediničnog radijusa s linearnim mjerilom:

$$m_l = sec\,\phi \cdot \tag{8-6}$$

Drugi korak zahtijeva određenje harmoničke funkcije koja transformira domenu u jedinični krug. Ta transformacija mora biti normalizirana, a to znači da neka točka domene $\left(q_0, l_0\right)$ postaje centar jediničnog kruga.
Treći i posljednji korak određuje transformaciju $z = z(u)$ jediničnog kruga u zatvorenu domenu z – ravnine zadovoljavajući osnovni uvjet Čebiševljevih projekcija da mjerilo duž granične konture ima konstantnu vrijednost. Kombinirano mjerilo sva tri koraka je onda:

$$m = sec\,\phi \left|\frac{du}{d\omega}\right|\left|\frac{dz}{du}\right| = const.\,, \tag{8-7}$$

gdje je:

$$z = y + ix\,,\ \omega = q + il\,,\ z = \omega\,, \tag{8-8}$$

a u je analitička funkcija. Derivacija dz/du određena je na jediničnom krugu. Istovremeno imamo:

$$\nu = ln\left|\frac{dz}{dy}\right| \quad , \quad \beta = arg\,\frac{dy}{du}\,. \tag{8-9}$$

Obje funkcije ν i β su harmonične i konjugirane, pa prema tome Cauchy-Riemannova jednadžba:

$$x_l = y_\phi = Re\frac{dF\left(\omega\right)}{d\omega} \quad , \quad -x_q = y_l = -Im\frac{dF\left(\omega\right)}{d\omega}\,. \tag{8-10}$$

dat će funkciju β , a zatim duž jediničnog kruga i derivaciju dz/du. Integracijom te derivacije duž jediničnog kruga konačno dobivamo harmoničku funkciju $z = z\left(u\right)$ na graničnoj konturi, a njena transformacija, na primjer metodom Kantorovića (Kantorovič, Krilov, 1958), konačno završava s konformnom projekcijom jediničnog kruga na zatvorenu domenu. Detaljni opis tih metoda dat je u (Frankich, 1977).

9. ZAKLJUČAK

Iz svega ovog predočenog očito je da je i sam pojam optimalne kartografske projekcije neke zatvorene domene nejedinstven i matematički nedefiniran jedinstvenom funkcijom, pa prema tome i putovi njenog ostvarenja nisu jednoznačni. Ovisno o definiciji kvalitete projekcije i metode njenog razvoja se razlikuju. Koje su transformacije kod grafičkog prikazivanja neke kartografske domene najbolje? Do sada kroz povijest se izbor kartografske projekcije sveo na subjektivnu odluku nekog kartografa na njegovo znanje i intuiciju. Objektivni kriteriji nisu službeno postojali, a ne postoje ni danas. Kartografska profesija trebala bi se u prvom redu usuglasiti u definiciji kvalitete neke projekcije, a poslije toga bilo bi relativno jednostavno razviti metodu dobivanja parametara izabrane projekcije. U ovom radu prihvaćen je kriterij Airy-Kavrajski koji predstavlja Euklidsku normu linearnih deformacija. Ostvarenje minimuma Euklidske norme postiže se primjenom metode najmanjih kvadrata, a ona je relativno dobro poznata geodetskoj profesiji. Kartografska domena aproksimira se konačnim brojem individualnih točaka koje ju ravnomjerno pokrivaju. Kontura domene zamijeni se poligonom točaka. Airy-Kavrajski kriterij se izračuna za svaku točku domene, a poslije toga metoda najmanjih kvadrata rezultira u parametrima projekcije. Zapravo metoda se primjenjuje iterativno, što znači da se svaki skup izračunatih parametara ponovno vraća u model kao približna vrijednost i računanje se ponovi. Iterativni postupak završava s izračunatom mjerom kvalitete (Euklidskom normom) i sve dok se nakon svakog ponavljanja ta norma smanjuje treba postupak ponavljati. Smanjenje norme pokazuje da postoji željena konvergencija. Ukoliko norma postaje nakon svake iteracije veće i veća, očito su prve aproksimacije nepoznatih parametara projekcije krive i treba ih mijenjati. Onog momenta kad nema očitog poboljšanja norme postupak se prekida i posljednje vrijednosti parametara projekcije postaju završne vrijednosti. Kako se kompletno računanje radi na brzim modernim elektroničkim kompjutorima to je postupak kratak i na taj način pruža mogućnost optimiziranja nekoliko projekcija, a to opet omogućuje komparaciju izračunatih Airy-Kavrajski kriterija za svaku pojedinačno. Ona projekcija koja ima najmanju vrijednost norme može se proglasiti optimalnom. Naravno, optimalna projekcija je po svoj prilici u kosom aspektu i po grafičkom prikazu mreže meridijana i paralela teško se može zaključiti o kojoj se projekciji radi. Uostalom to nije ni važno. Najvažnije je da je domena kartirana s najmanjim linearnim deformacijama, znači da je kartografska slika domene najvjernija originalu.

LITERATURA

Airy, G.B. (1861): Explanation of a projection by balance of errors for maps applying to a very large extent of the eart´s surface; and comparison with other projections. Philosofical Magazine and Journal of Science, Vol. 22, str.409-421.

Biernacki, F. (1965): Podstawy Teorii Odwzorowan Kartograficznych. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsava.

Borčić, B. (1955): Matematička Kartografija. Tehnička knjiga, Zagreb.

Conte, S.D.; Carl de Boor (1972): Elementary Numerical Analyses. McGraw-Hill Book Company, New York.

Deetz, C.H.; Adams, O.S. (1945): Elements of Map Projections. U.S. Department of Commerce, Coast and Geidetic Survey. Special Publication No. 68, Washington D.C.

Driencourt et Laborde (1932): Traite des projections des cartes geographiques a l´usage des cartographes et des geodesiens. Hermann et C-ie, Paris.

Eisenhart, L.P. (1960): A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publication, New York.

Fiala, F. (1957): Mathematische Kartographie. VEB Verlag Technik, Berlin.

Frančula, N. (1971): Die vortailhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie. Institut für Kartographie und Topographie der Universität Bonn. Bonn.

Frankich, K. (1977): Mathematical Cartography. Lecture Notes, British Columbia Institute of Technology, Burnaby, B.C.

Frankich, K. (1977): A Study in Conformal Mapping. University of New Brunswick. Technical Report No. 45, Fredericton, N.B.

Frankić, K. (2010): Matematička kartografija, skripta. Građevinski fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo.

Gauss, C.F. (1825): Allgemeine Auflősung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so auszubilden dass die Abbildung dem Abgebideten in den kleinsten Theilen änlich wird. Astronomische Abhandlungen, Vol. 3, Altona.

Goetz, A.(1970): Introduction to Differential Geometry. Addison Wesley Publishing Company, New York.

Grossmann, W. (1976): Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.

Hotine, M. (1946): The orthomorphic projection of the spheroid. Empire Survey Review, Vol. 8, str. 300-311, Vol. 9, str. 25-53, 52-70, 112-123, 157-166.

Kantorovich, L.V.; Krylov, V.I. (1958): Approximate methods of Higher Analysis. P. Noordhoff Ltd., Groningen.

Kavrajski, V.V. (1959): Izabranie Trudi, Vol I, II, III, Matematičeskaja Kartografija. Hidrografik Servis VMF, Moskva.

Lambert, J.H. (1972): Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps. Michigan Geographical Publication No. 8, Department of Geography, University of Michigan.

Mailing, D.H. (1973): Coordinate Systems and Map Projections. George Philip and Son Ltd., London.

Meščerjakov, G.A. (1968): Teoretičeskije osnovi matematičeskoj kartografiji. Nedra, Moskva.

Robinson, A.H. (1951): The use of deformational data in evaluation world map projections. Annals of the Association of American Geographers, Vol. 41, No. 1, str. 58-74.

Urmaev, N.A. (1953): Isledovanija po matematičeskoj kartografiji. Publikacija CNIIGAIK, NO.144, Moskva.

Vahramaeva, L.A. (1963): Generalized formulas for conformal projections.

Wagner, K. (1962): Kartographische Netzentwürfe, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Wray, T. (1974): The seven aspects of a general map projection. Cartographica, Monograph No.11, York University, Toronto.

Wray, T. (1974): An integrated approach to map projections and plane coordinates. The Canadian Surveyor, Vol.28, No. 5, str. 637-642.

Young, A.E. (1920): Some Investigation in the Theory of Map Projections. Royal Geographic Society, London.

Autor:

Prof.dr.sc. Krešimir Frankić, dipl.inž.geod.
British Columbia Institute of Technology
3700 Willingdon Avenue
Burnaby, British Columbia
Canada
E-mail: kfrankich@gmail.com